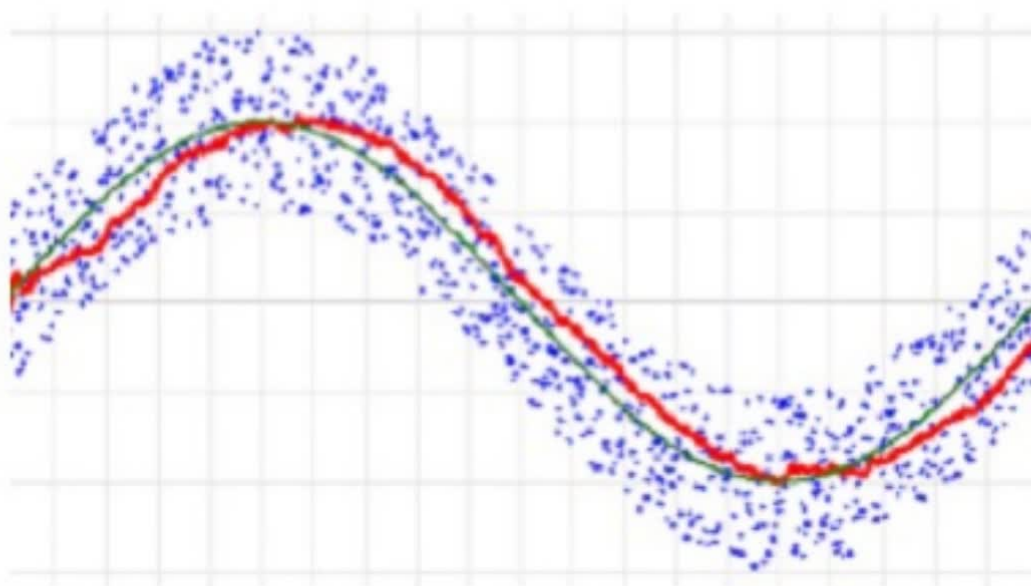


卡尔曼滤波

从放弃到精通



Copyright @华工机器人实验室 @421施公队

Clang

Kalman Filter

Catalog

一. 入门 ☆

- 1. 引入
- 2. 适用系统
- 3. 宏观意义

二. 进阶 ☆☆

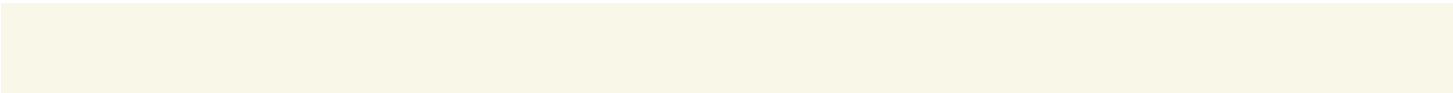
- 1. 状态空间表达式
- 2. 高斯分布
- 3. 超参数
- 4. 卡尔曼直观图解

三. 放弃 ☆☆☆

- 1. 卡尔曼公式理解
- 2. 调节超参数
- 3. 卡尔曼滤波的使用

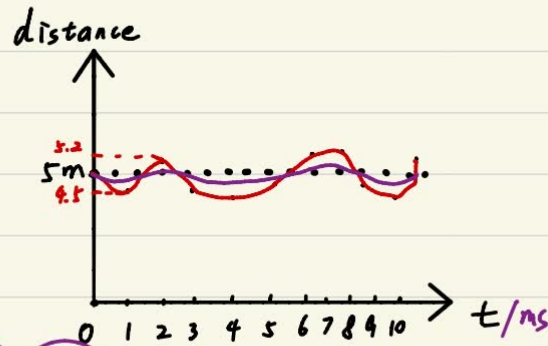
四. 精通 ☆☆☆☆

- 1. 卡尔曼滤波公式回顾
- 2. 机器人应用举例



一、入门★

1. 引入



2. 适用系统

线性高斯系统

线性: $y = kx + b$ $z = ax + by$ $w = u^2 + v^2$

线性 { 叠加性
齐次性

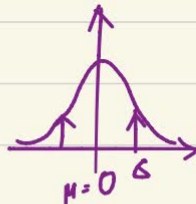
1. 叠加性

$y \leftarrow \boxed{\quad} \leftarrow \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \Leftrightarrow y \leftarrow \oplus \leftarrow \begin{matrix} y_1 \leftarrow x_1 \\ y_2 \leftarrow x_2 \end{matrix} \quad y = ax_1 + bx_2$

2. 齐次性

$ky \leftarrow \boxed{\quad} \leftarrow kx$

高斯: 噪声满足正态分布



3. 宏观意义: 滤波即加权

理想状态: 信号 $\times 1$ + 噪声 $\times 0$

低 1 高 0

低通滤波

估计: () 观测: ()

卡尔曼滤波

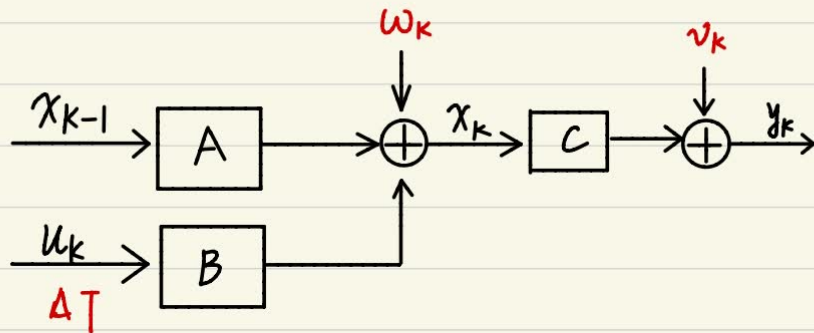
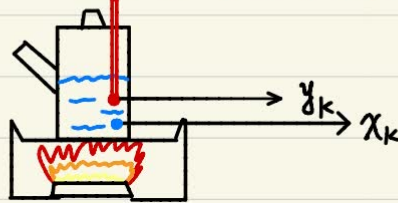
修正

二. 进阶☆☆

1. 状态空间表达式

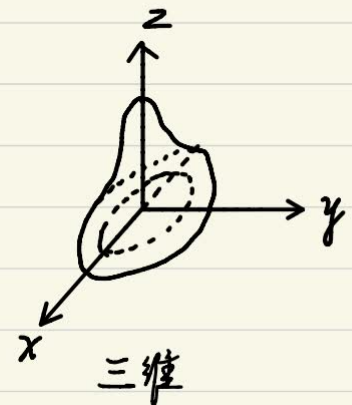
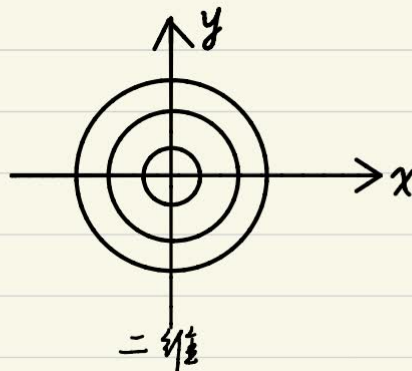
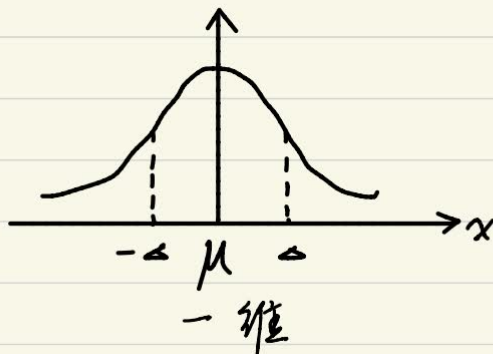
状态方程 $x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + w_k$
 $x_k = x_{k-1} + \Delta T + w_k$

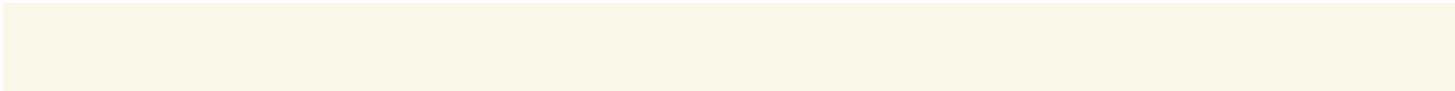
观测方程 $y_k = Cx_k + v_k$
 $y_k = x_k + v_k$



2. 高斯分布

(1) 直观图解





(2) 参数分析

I. $w_k \in N(0; Q_k)$

$V_k \in N(0; R_k)$

exp: V_k, R_k 定义
GPS $\rightarrow$ Position w_k, Q_k 定义

$$\underline{\underline{V}} \rightarrow \text{circle with } 0 \text{ inside}$$

$1000m \pm 8m \text{ 噪声}$

$V_k = 8m$

$5m/s \pm \frac{8m/s}{\Delta} \quad w_k = 8m/s$

方差为 $1m$ 噪声

$R_k = 1m$

$S \in N(0, 1) \quad Q_k = 1/s$
 $1m/s$

II. 方差

一维方差 Δ 二维协方差 $\text{cov}(X, Y)$ 多维协方差矩阵 C

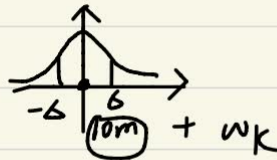
$$\text{cov}(X, Y) = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{bmatrix}$$

(一)

$[1] \quad Q_k \quad R_k$

$$C = \begin{bmatrix} \text{cov}(X_1, X_1) & \text{cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{cov}(X_1, X_n) \\ \text{cov}(X_2, X_1) & \text{cov}(X_2, X_2) & \cdots & \text{cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(X_n, X_1) & \text{cov}(X_n, X_2) & \cdots & \text{cov}(X_n, X_n) \end{bmatrix}$$

$[2] \quad \hat{x}_t$



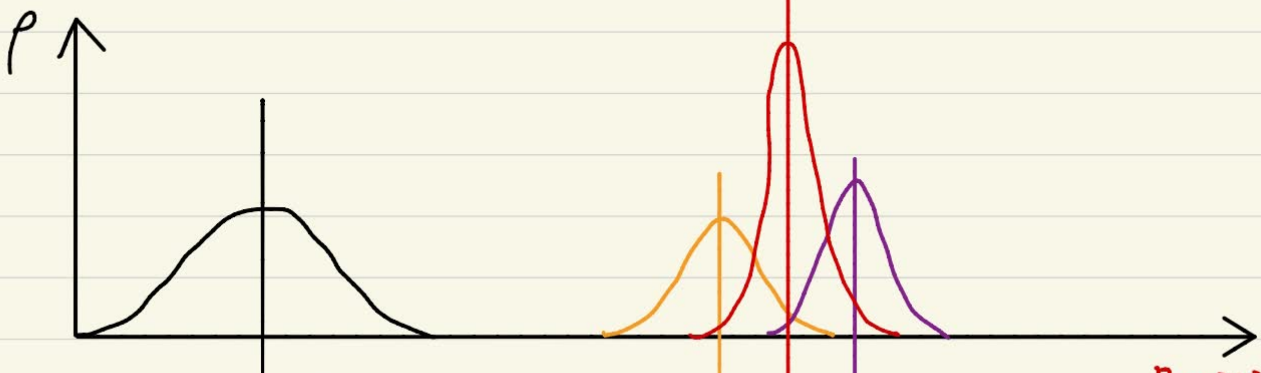
$$(二) \quad \hat{x}_t = \begin{bmatrix} \hat{x}_{t1} \\ \hat{x}_{t2} \end{bmatrix} \rightarrow w_{k1}$$

$$\text{cov}(\hat{x}_{t1}, \hat{x}_{t2}) = \begin{bmatrix} \text{cov}(X_1, X_1) & \text{cov}(X_1, X_2) \\ \text{cov}(X_2, X_1) & \text{cov}(X_2, X_2) \end{bmatrix}$$

3. 超参数

$Q, R \sim \text{PID}$

4. 卡尔曼直观图解



$$| \hat{x}_{k-1}$$

$$| \hat{x}_k | \hat{x}_k | y_k = x_k$$

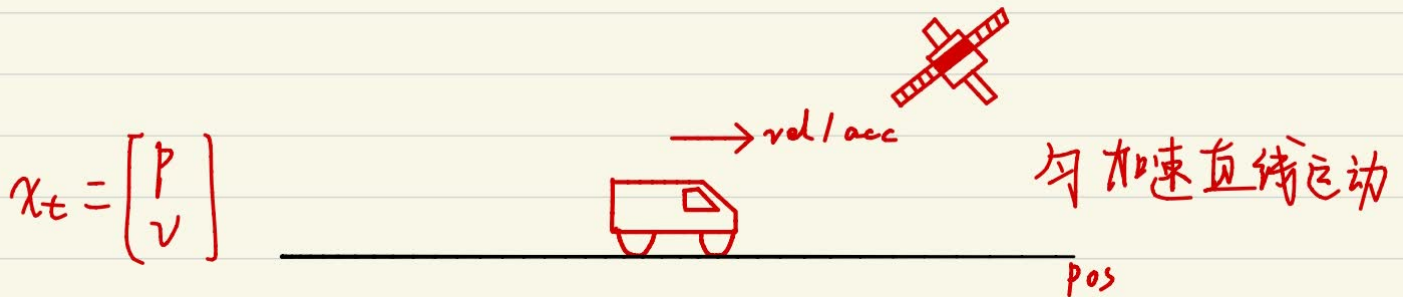
position

三、放弃☆☆☆

1. 卡尔曼公式理解

☆ 实现过程：使用上一次的最优结果预测当前的值，
同时使用观测值修正当前值，得到最优结果

预测	更新
$\hat{x}_t^- = F\hat{x}_{t-1} + Bu_{t-1}$	$K_t = P_t^- H^T (HP_t^- H^T + R)^{-1}$
$P_t^- = FP_{t-1}F^T + Q$	$\hat{x}_t = \hat{x}_t^- + K_t(z_t - H\hat{x}_t^-)$
	$P_t = (I - K_t H)P_t^-$



预测

预测模型 $\left\{ \begin{array}{l} p_i = p_{i-1} + v_{i-1} \cdot \Delta t + \frac{a}{2} \Delta t^2 \\ v_i = v_{i-1} + a \cdot \Delta t \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} p_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{i-1} \\ v_{i-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} \\ \Delta t \end{bmatrix} a_i$

$$\hat{x}_t^- = F \cdot \hat{x}_{t-1} + B \cdot u_{t-1}$$

① 先验估计

$$\Rightarrow \hat{x}_t^- = F\hat{x}_{t-1} + Bu_{t-1}$$

② 先验估计协方差

$$\Rightarrow P_t^- = FP_{t-1}F^T + Q$$

测量

测量模型 $\begin{cases} z_p = p_t + \Delta p_t \\ z_v = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} z_p \\ z_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_t \\ v_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p_t \\ \Delta v_t \end{bmatrix}$$

③ 测量方程

$$\Rightarrow z_t = Hx_t + v \quad (z_t \text{ 的维数不一定跟 } \hat{x}_t \text{ 相同})$$

状态更新

④ 修正估计

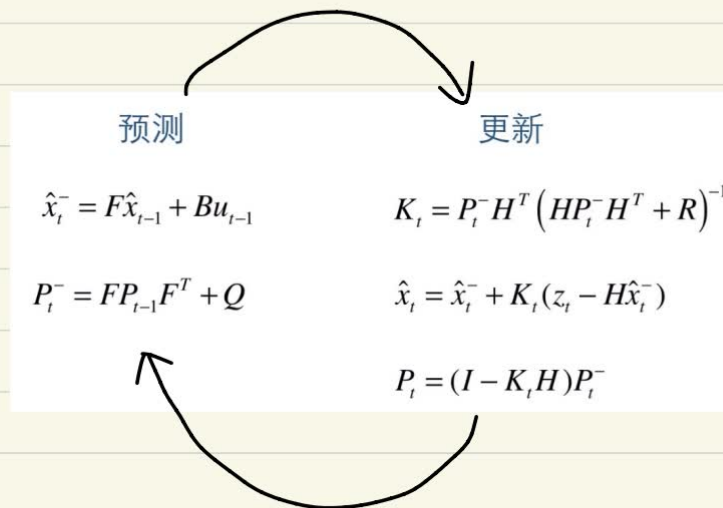
$$\Rightarrow \hat{x}_t = \hat{x}_t^- + K_t (z_t - H\hat{x}_t^-) \quad (\text{最终滤波结果})$$

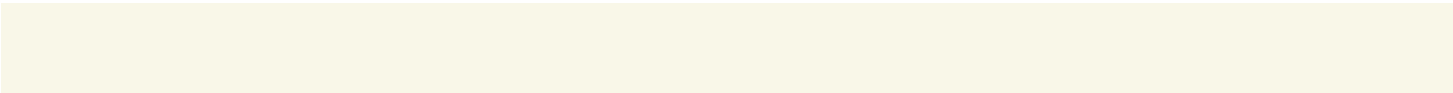
⑤ 更新卡尔曼增益

$$\Rightarrow K_t = \frac{P_t^- H^T}{H P_t^- H^T + R}$$

⑥ 更新后验估计协方差

$$\Rightarrow P_t = (I - K_t H) P_t^-$$





2. 调节超参数

(1) Q 与 R 的取值

I. 公式层面理解

$$\left. \begin{aligned} P_t^- &= F P_{t-1} F^T + Q \\ K &= \frac{P_t^- H^T}{H P_t^- H^T + R} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{化简}} K = \frac{P_{t-1} + Q}{P_{t-1} + Q + R}$$

$$\hat{x}_t = \hat{x}_t^- + K (\hat{z}_t - H \hat{x}_t^-)$$

① 分析 Q

② 分析 R

II. 其他层面理解

① 分析 Q

② 分析 R

(2) P_0 与 $\hat{x}_0$ 的取值

习惯取 $\hat{x}_0 = 0$, P 往小的取, 方便收敛 (一般取 1)
(不可为 0)

3. 卡尔曼滤波的使用

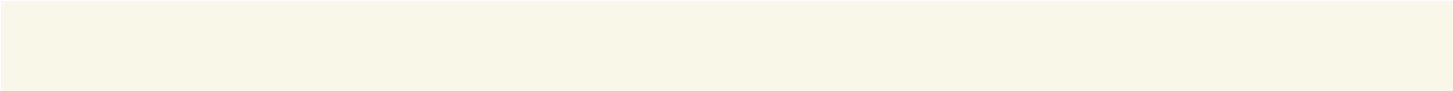
(1) 选择状态量、观测量

(2) 构建方程

(3) 初始化参数

(4) 代入公式迭代

(5) 调节超参数



四. 精通 ~~★★★★~~

1. 卡尔曼滤波公式回顾

预测

更新

$$\hat{x}_t^- = F\hat{x}_{t-1} + Bu_{t-1}$$

$$K_t = P_t^- H^T (H P_t^- H^T + R)^{-1}$$

$$P_t^- = F P_{t-1} F^T + Q$$

$$\hat{x}_t = \hat{x}_t^- + K_t (z_t - H\hat{x}_t^-)$$

$$P_t = (I - K_t H) P_t^-$$

公式 ↓ 比对

$X(k)$ k 时刻系统状态

$Z(k)$ k 时刻测量值

$U(k)$ k 时刻对系统控制量

H 测量系统参数

A/F 状态转移矩阵

$W(k)$ 过程噪声

方差 → Q

B 控制矩阵

$V(k)$ 测量噪声

方差 → R

离散控制系统

$$\begin{cases} \text{系统描述} & X(k) = AX(k-1) + BU(k) (+W(k)) \\ \text{测量值} & Z(k) = HX(k) + V(k) \end{cases}$$

系统预测

$$X(k|k-1) = AX(k-1|k-1) + BU(k) \quad \textcircled{1} \text{ 先验估计}$$

$\uparrow$ $X(k-1)$ 预测结果 $\uparrow$ $k-1$ 态最优结果 $\uparrow$ 状态控制量
 $\downarrow \text{cov}[X(k|k)]$ $\downarrow \text{cov}[X(k-1|k-1)]$ 误差协方差

$$P(k|k-1) = AP(k-1|k-1)A^T + Q \quad \textcircled{2} \text{ } Q - \text{系统过程 cov}$$

测量方程 ———— $Z(k) = HX(k) + V(k)$ ③ 建立测量方程

结合观测值 计算最优估计值 $X(k|k)$

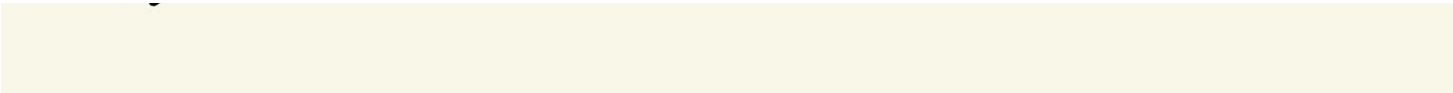
生成最优估计

$$K_g(k) = \frac{P(k|k-1)H^T}{HP(k|k-1)H^T + R} \quad \textcircled{4} \text{ 计算卡尔曼增益}$$

$$X(k|k) = X(k|k-1) + K_g(k)[Z(k) - HX(k|k-1)]$$

⑤ 修正估计

更新 P_+ ———— $P(k|k) = [I - K_g(k)H] P(k|k-1)$ ⑥ 更新误差协方差



2. 机器人应用举例

① 状、观

② 方程

2.1 ① 陀螺仪滤波

状 $\begin{bmatrix} \text{angle} \\ Q_bias \end{bmatrix}$ 观 $\begin{bmatrix} \text{newGyro} \end{bmatrix}$

明确以下参数

陀螺仪噪声协方差	Q_angle	陀螺仪测得角速度	newGyro
陀螺仪漂移噪声协方差	Q_gyro	采样周期	dt
角度测量噪声协方差	R_angle		

一、预测当前角度

由先验估计方程 $X(k|k-1) = A X(k-1|k-1) + B U(k) + W(k)$

$$\begin{bmatrix} p_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{i-1} \\ v_{i-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} \\ \Delta t \end{bmatrix} a_i$$

$X(k)$ $A \cdot X(k-1)$ $B \cdot U(k)$

预测当前角度值 1. $\text{angle}_i = \text{angle}_{i-1} - Q_bias \cdot dt + \text{newGyro} \cdot dt$ 在此过程噪声包含于加速度计测量值

2. $Q_bias = Q_bias$

$$\begin{bmatrix} \text{angle} \\ Q_bias \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -dt \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{angle} \\ Q_bias \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dt \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \text{newGyro}$$

code

$$\Rightarrow \text{angle} = \text{angle} - Q_bias \cdot dt + \text{newGyro} \cdot dt$$

$$Q_bias = Q_bias$$

二、预测协方差矩阵

由误差协方差方程 $P(k|k-1) = A P(k-1|k-1) A^T + Q$

由先验估计有系统参数

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -dt \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

系统过程协方差噪声Q定义

$$\begin{vmatrix} \text{cov}(\text{angle}, \text{angle}) & \text{cov}(Q_bias, \text{angle}) \\ \text{cov}(\text{angle}, Q_bias) & \text{cov}(Q_bias, Q_bias) \end{vmatrix}$$

角度噪声跟角速度漂移噪声独立

$$= \begin{vmatrix} D(\text{angle}) & 0 \\ 0 & D(Q_bias) \end{vmatrix}$$

$D(\text{angle}) = Q_angle$ $D(Q_bias) = Q_gyro$

α_{angle} 和 α_{gyro} 的力左为常数，
可由经验给出，或计算得出。

设上一次预测协方差矩阵 P_{k-1} 为 本次预测协方差矩阵 P_k 为

$$\begin{bmatrix} a_{k-1}^* & b_{k-1}^* \\ c_{k-1}^* & d_{k-1}^* \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{bmatrix}$$

将以上参数代入预测协方差公式

$$\begin{bmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -dt \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{k-1}^* & b_{k-1}^* \\ c_{k-1}^* & d_{k-1}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -dt & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D(\text{angle}) & 0 \\ 0 & D(Q_bias) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{k-1}^* - c_{k-1}^* dt & b_{k-1}^* - d_{k-1}^* dt \\ c_{k-1}^* - d_{k-1}^* dt & d_{k-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D(\text{angle}) & 0 \\ 0 & D(Q_bias) \end{bmatrix}$$

code

⇒

由于 dt^2 太小, $P[1][1]$ 项可省略

$$P[0][0] = P[0][0] + Q_angle - (P[0][1] - P[1][0]) \times dt + P[1][1] \times (dt)^2$$

$$P[0][1] = P[0][1] - P[1][1] \times dt$$

$$P[1][0] = P[1][0] - P[1][1] \times dt$$

$$P[1][1] = P[1][0] + Q_gyro$$

三、建立测量方程

$$\text{系统测量方程} \quad Z(k) = HX(k) + V(k)$$

$$\text{系统测量系数} \quad H = [1, 0]$$

code

⇒

$$\text{measure} = \text{newAngle}$$

在此测量噪声

已包含于角度测量值里

四、计算卡尔曼增益

由卡尔曼增益系数方程

$$K_g(k) = \frac{P(k|k-1)H^T}{HP(k|k-1)H^T + R}$$

角度测量噪声

R_angle

为常数

由于卡尔曼系数包括
角度与陀螺仪漂移

$$\begin{bmatrix} K_0 \\ K_1 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + R_angle}$$

| 2 a | | 0 |

code

$$\Rightarrow K_0 = \frac{P^{(a)}[0][0]}{(P^{(a)}[0][0] + R_angle)}$$

$$K_1 = \frac{P^{(c)}[1][0]}{(P^{(a)}[0][0] + R_angle)}$$

五. 计算当前最优估计值.

根据最优估计值方程 $X(K|K) = X(K|K-1) + K_g(K) [Z(K) - HX(K|K-1)]$

$$\begin{vmatrix} angle \\ Q_bias \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} angle \\ Q_bias \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_0 \\ K_1 \end{vmatrix} (newAngle - \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} angle \\ Q_bias \end{vmatrix})$$

code

$$\Rightarrow angle = angle + K_0 (newAngle - angle)$$

$$Q_bias = Q_bias + K_1 (newAngle - angle)$$

六. 更新协方差矩阵

根据误差协方差

$$P(K|K) = [I - K_g(K)H] P(K|K-1)$$

$$\begin{bmatrix} a_k^* & b_k^* \\ c_k^* & d_k^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} K_0 \\ K_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{bmatrix}$$

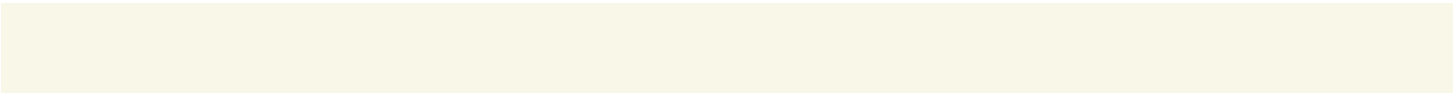
code

$$\Rightarrow P[0][0] = P[0][0] - K_0 \cdot P[0][0]$$

$$P[0][1] = P[0][1] - K_0 \cdot P[0][1]$$

$$P[1][0] = P[1][0] - K_1 \cdot P[0][0]$$

$$P[1][1] = P[1][1] - K_1 \cdot P[0][1]$$



```

void Kalman_Filter ( float newAngle , float newGyro )
{
  ① angle = angle - Q_bias · dt + newGyro · dt ;

  ② P[0][0] = P[0][0] + Q_angle - (P[0][1] - P[1][0]) × dt ;
    P[0][1] = P[0][1] - P[1][1] × dt ;
    P[1][0] = P[1][0] - P[1][1] × dt ;
    P[1][1] = P[1][1] + Q_gyro ;

  ③ measure = newAngle ;

  ④ K0 = ( P[0][0] ) / ( P[0][0] + R_angle ) ;
    K1 = ( P[1][0] ) / ( P[0][0] + R_angle ) ;

  ⑤ angle = angle + K0 ( newAngle - angle ) ;
    Q_bias = Q_bias + K1 ( newAngle - angle ) ;

  ⑥ P[0][0] = P[0][0] - K0 · P[0][0] ;
    P[0][1] = P[0][1] - K0 · P[0][1] ;
    P[1][0] = P[1][0] - K1 · P[0][0] ;
    P[1][1] = P[1][1] - K1 · P[0][1] ;
}

```

至此代码编写结束

绿色为参数，为测量值
红色为最佳估计值

Tips: 对于多数IMU, 我们有以下初始参数

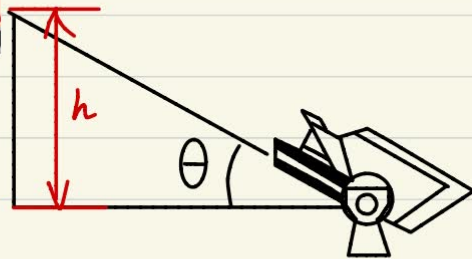
$$Q_angle = 0.001$$

$$Q_gyro = 0.003$$

$$R_angle = 0.03$$

2.2 ② 视觉跟随装甲板

(1) 图解



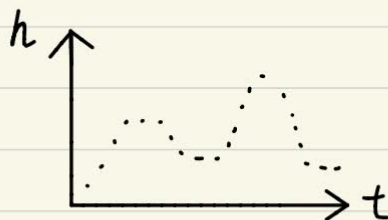
(2) 通信

miniPC

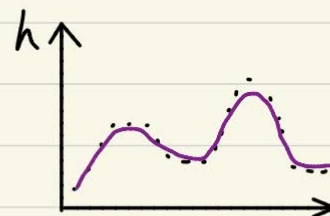
50Hz

stm32

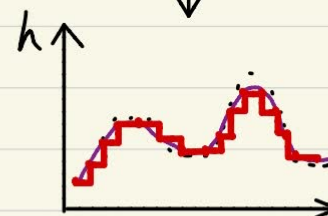
(3) 数据图解



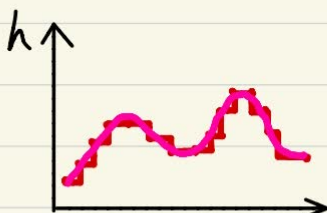
miniPC 滤波

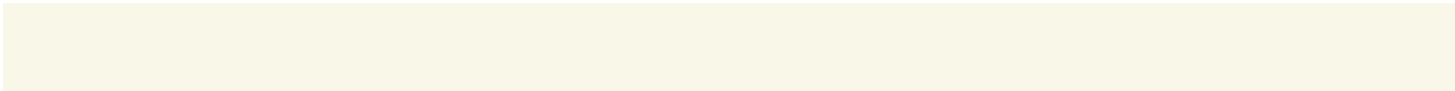


传输给
stm32 50Hz



stm32 滤波





(4) 滤波过程

设所测高度 h 随时间为

t/ms	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h/cm	20	25	31	31	25	30	35	28	24

① 选择状态量: height 选择观测量: height

② 构建方程: (一维卡尔曼)

$$a \begin{cases} \hat{x}_t^- = F \hat{x}_{t-1} + B u_t \\ z_t = H x_t \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 分析有, $F = 1$, $u_t = 0$

$$H = 1$$

方程简化为, $\hat{x}_t^- = \hat{x}_{t-1}$

$$z_t = x_t$$

$$b \begin{cases} P_t^- = F P_{t-1} F^T + Q \\ K_t = \frac{P_t^- H^T}{H P_t^- H^T + R} \end{cases}$$

$$\hat{x}_t = \hat{x}_t^- + K (z_t - H \hat{x}_t^-)$$

$$1 \quad r_t = (L - K_t H) / P_t$$

$\Rightarrow$ 分析有, 设 $Q=0$, 又 $F=1$, $H=1$

$$P_t^- = P_{t-1}$$

方程化简得,

$$K_t = \frac{P_t^-}{P_t^- + R}$$

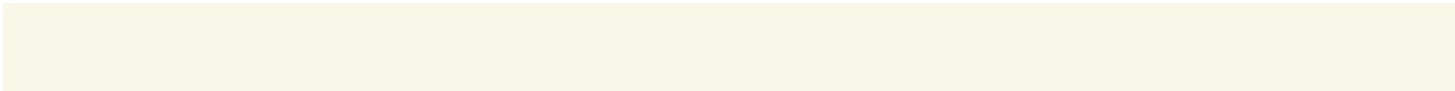
$$\hat{x}_t = \hat{x}_t^- + K(\hat{z}_t - \hat{x}_t^-)$$

$$P_t = (I - K_t) P_t^-$$

状态估计	修正估计
$\hat{x}^- = \hat{x}_{t-1}$	$K_t = \frac{P_t}{P_t^- + R}$
$P_t^- = P_{t-1}$	$\hat{x}_t = \hat{x}_t^- + K(\hat{z}_t - \hat{x}_t^-)$
	$P_t = (I - K_t) P_t^-$

③ 初始化参数

$$\hat{x}_0 = 0, \quad P_0 = 1, \quad R = 0.01$$



④ 代入公式迭代

t	z_t	$\hat{x}_{t-1}$	p_k^-	预测	修正	$\hat{x}_k$	p_k
1	20	0	1	$\hat{x}_1^- = \hat{x}_0 = 0$ $p_1^- = p_0 = 1$	$K_1 = \frac{1}{1+0.01}$ $= 0.909$ $\hat{x}_1 = 0.909 \cdot (20-0)$ $= 18.18$ $p_1 = (1-0.909) \cdot 1$ $= 0.091$	18.18	0.091
2	25	18.18	0.091	$\hat{x}_2^- = 18.18$ $p_2^- = 0.091$	$K_2 = \frac{0.091}{0.091+0.01}$ $= 0.476$ $\hat{x}_2 = 18.18$ $+ 0.476 \cdot (25-18.18)$ $= 21.43$ $p_2 = (1-0.476) \cdot 0.091$ $= 0.048$	21.43	0.048
3							
⋮							
8							
9							

⑤ 调节超参数(略)

至此滤波过程结束

卡尔曼滤波讲解到此，感谢大家～
祝大家从放弃到精通～

Copyright @华工机器人实验室 @421施公队